

## Facharbeit

aus dem Fach  
Mathematik

Thema: Numerische Verfahren zur Nullstellenberechnung (mit Computereinsatz)

Verfasser: Malte Kraus  
Kursbezeichnung (im 4. Kurshalbjahr): 3M11  
Kursleiter: OStR Martin Donat  
Abgabetermin: **30. Januar 2009**

Facharbeit

Punkte

mündliche Prüfung

Punkte

---

Unterschrift des Kursleiters

## Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.....	3
2. Vorbemerkungen.....	4
2.1 Begriffsklärung.....	4
2.2 Abbruchkriterien.....	4
3. Die verschiedenen Verfahren.....	5
3.1 Bisektion.....	5
3.1.1 Funktionsweise.....	5
3.1.2 Eigenschaften.....	5
3.1.2.1 Unabhängigkeit der Konvergenzgeschwindigkeit vom Funktionsgraphen...5	
3.1.2.2 Definitionslücken ungerader Ordnung.....	6
3.2 Regula Falsi.....	6
3.2.1 Funktionsweise.....	6
3.2.2 Eigenschaften - Aktualisieren nur einer Näherung.....	7
3.3 Das Newton-Verfahren.....	8
3.3.1 Funktionsweise.....	8
3.3.2 Eigenschaften.....	9
3.3.2.1 Senkrechte Tangente.....	9
3.3.2.2 Nullstellen geraden Grades.....	9
3.3.2.3 Nicht-Konvergenz.....	9
3.3.2.4 Verlassen der Definitionsmenge.....	10
3.4 Vergleich.....	10
3.4.1 Konvergenzgeschwindigkeiten.....	10
3.4.2 Fazit.....	11
4. Umsetzung in einem Computerprogramm.....	12
4.1 Bestimmung der Startwerte.....	12
4.2 Überblick.....	12
4.3 Genauere Betrachtung der Klasse NullstellenSuche.....	12
4.4 Umsetzung der Verfahren.....	13
5. Schluss.....	14
6. Literaturverzeichnis.....	15
7. Anhang.....	18
A) Beispieldurchläufe der verschiedenen Verfahren.....	18
B) Anlagen.....	23

## 1. Einleitung

In nahezu jeder Natur- oder Geisteswissenschaft müssen mathematische Gleichungen gelöst werden. Für jene Fälle, in denen diese nicht oder nur mit hohem Aufwand exakt bestimmt werden können, gibt es unterschiedliche Verfahren, deren Lösungen zumindest näherungsweise zu berechnen. Die Verfahren bauen darauf auf, eine Gleichung  $f(x)=g(x)$  durch Umformung in die Form  $f(x)-g(x)=0$  als Nullstellenproblem zu formulieren. Auch in der Differentialrechnung gibt es viele Probleme, wie das Finden von Extrem- oder Wendepunkten, die durch die Suche nach Nullstellen von Funktionen gelöst werden. Die jeweiligen Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen können unter bestimmten Umständen besonders schnell oder langsam eine Lösung finden und in einigen Fällen sogar fehlschlagen.

Hier sollen die verschiedenen Methoden vorgestellt und das Verhalten in unterschiedlichen Situationen aufgezeigt werden. Außerdem wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Beispiel-Computerprogramm verfasst, das diese Verfahren zum Berechnen von Nullstellen nutzt.

## 2. Vorbemerkungen

### 2.1 Begriffsklärung

- **Iteration:** ein Rechenschritt, der wiederholt ausgeführt wird bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist
- **Konvergenz:** das Anstreben eines Grenzwerts durch eine Folge; hier also das Erreichen der Nullstelle

### 2.2 Abbruchkriterien

Da die verschiedenen Näherungsverfahren nie einen exakten Wert liefern, muss an einem gewissen Punkt die Fortführung abgebrochen und ein Ergebnis ausgegeben werden. Dabei kann man entweder solange iterieren, bis der Funktionswert an der Näherung der Nullstelle nahezu Null ist ( $\varepsilon - |f(x_n)| > 0$ ), oder bis die Differenz der x-Werte der letzten beiden Schritte nahezu Null ist ( $\varepsilon - |x_n - x_{n-1}| > 0$ ). Um zu vermeiden, dass ein Computerprogramm ohne Ausgabe „hängt“ wenn ein Verfahren nicht konvergiert, bietet sich außerdem ein Abbruch nach einer unwahrscheinlich hohen Anzahl an Durchläufen an.

### 3. Die verschiedenen Verfahren

#### 3.1 Bisektion

##### 3.1.1 Funktionsweise

Für die sogenannte Bisektion (auch Intervallhalbierung) benötigt man zwei Punkte auf dem Graphen der Funktion, die der Nullstelle möglichst nahe sind. Einen mit positiver und einen mit negativer y-Koordinate. Das Verfahren basiert auf der Annahme, dass dort, wo die Funktion ihr Vorzeichen ändert, eine Nullstelle liegt (s. 3.1.2.2 Definitionslücken ungerader Ordnung). Im ersten Schritt wird nun der Mittelwert der beiden

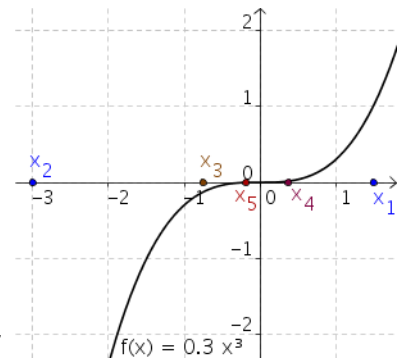


Abbildung 1: Die Bisektion

x-Werte gebildet. Für den nächsten Durchlauf des Verfahrens ersetzt der Punkt auf dem Graphen mit dem Mittelwert als x-Koordinate denjenigen Näherungswert, dessen Funktionswert das selbe Vorzeichen hat. So wird die Nullstelle immer weiter eingegrenzt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.<sup>1</sup>

$$f(x_1) < 0 < f(x_2)$$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

wenn  $f(x_3) < 0$  dann weiter mit  $x_1 = x_3$   
sonst  $x_2 = x_3$

##### 3.1.2 Eigenschaften

###### 3.1.2.1 Unabhängigkeit der Konvergenzgeschwindigkeit vom Funktionsgraphen

Bei der Bisektion spielt der Funktionswert für die Berechnung des nächsten Näherungswerts keine Rolle. Darum wird die Anzahl der benötigten Schritte nicht von der Funktion beeinflusst, sondern nur von der Entfernung der Startwerte von der Nullstelle und der gewünschten Genauigkeit<sup>1</sup>. Daraus folgt, dass es keine Funktionstypen gibt, für die dieses Verfahren besonders gut oder schlecht geeignet ist.

<sup>1</sup> vgl. Kley, 2005, S. 7f.

### 3.1.2.2 Definitionslücken ungerader Ordnung

Wenn die Bisektion zur Suche nach Nullstellen auf eine Funktion mit Polstellen ungerader Ordnung angewendet wird, kann diese je nach Wahl der Startwerte die Polstelle als Ergebnis liefern. Dieser Fehler resultiert aus der Tatsache, dass sich das Verfahren nur auf den Vorzeichenwechsel zum Finden der Nullstelle verlässt, dieser aber genauso auch an ungeraden Polstellen auftritt. Dieses Phänomen kann man in Abbildung 2 erkennen. Ein weiteres Beispiel findet sich auch in Tabelle 1 im Anhang.

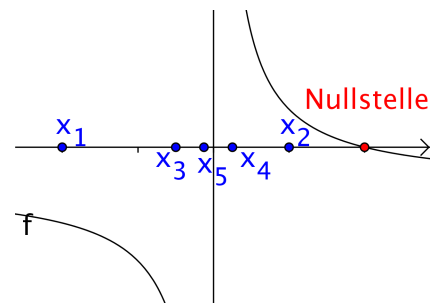


Abbildung 2: Konvergenz auf eine Polstelle

## 3.2 Regula Falsi

### 3.2.1 Funktionsweise

Für die sogenannte Regula Falsi (von lat. regula falsi positionis, Regel des falschen Ansatzes<sup>2</sup>) sind, wie bei der Bisektion, zwei bekannte Punkte auf dem Graphen der Funktion nötig. Der eine muss über, der andere unter der x-Achse liegen. Diese Punkte werden zu einer Geraden verbunden und die Gerade als Approximation der Kurve im Bereich der Nullstelle verwendet. Der Punkt auf dem Funktionsgraphen, an dem die Gerade ihre Nullstelle hat, ersetzt in den nächsten Iterationen den Punkt auf der selben Seite der x-Achse.<sup>3</sup>

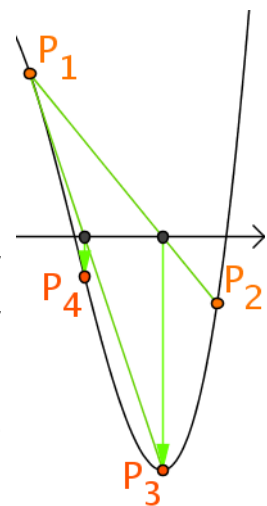


Abbildung 3: Regula Falsi

$$f(x_1) = y_1 < 0 < y_2 = f(x_2)$$

$$g(x) = m \cdot x + t$$

$$g(x_1) = f(x_1) \Rightarrow t = y_1 - m \cdot x_1$$

$$g(x_2) = f(x_2) \Rightarrow t = y_2 - m \cdot x_2$$

$$y_1 - m \cdot x_1 = y_2 - m \cdot x_2$$

$$m \cdot (x_1 - x_2) = y_1 - y_2$$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$t = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1 = \frac{y_1 \cdot (x_1 - x_2) - x_1 \cdot (y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$g(x_3) = m \cdot x_3 + t = 0 \Rightarrow m \cdot x_3 = -t \Rightarrow x_3 = -\frac{t}{m}$$

<sup>2</sup> vgl. Brand, 2005b

<sup>3</sup> vgl. Brauch et al., 2006, S.92 f.

$$x_3 = -\frac{y_1 \cdot (x_1 - x_2) - x_1 \cdot (y_1 - y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 \cdot (y_1 - y_2) - y_1 \cdot (x_1 - x_2)}{y_1 - y_2}$$

$$x_3 = x_1 - y_1 \cdot \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

Wenn  $y_3 = f(x_3) < 0$  für nächste Iteration  $x_1 = x_3$  setzen, sonst  $x_2 = x_3$

### 3.2.2 Eigenschaften - Aktualisieren nur einer Näherung

Die Regula Falsi konvergiert sehr langsam, sobald der Graph der Funktion im gesamten Intervall zwischen den beiden Näherungswerten rechts- bzw. linksgekrümmt ist, da dann die Gerade immer links bzw. rechts von der echten Nullstelle die x-Achse trifft und infolgedessen nur noch eine der beiden Näherungen verbessert wird.<sup>4</sup>

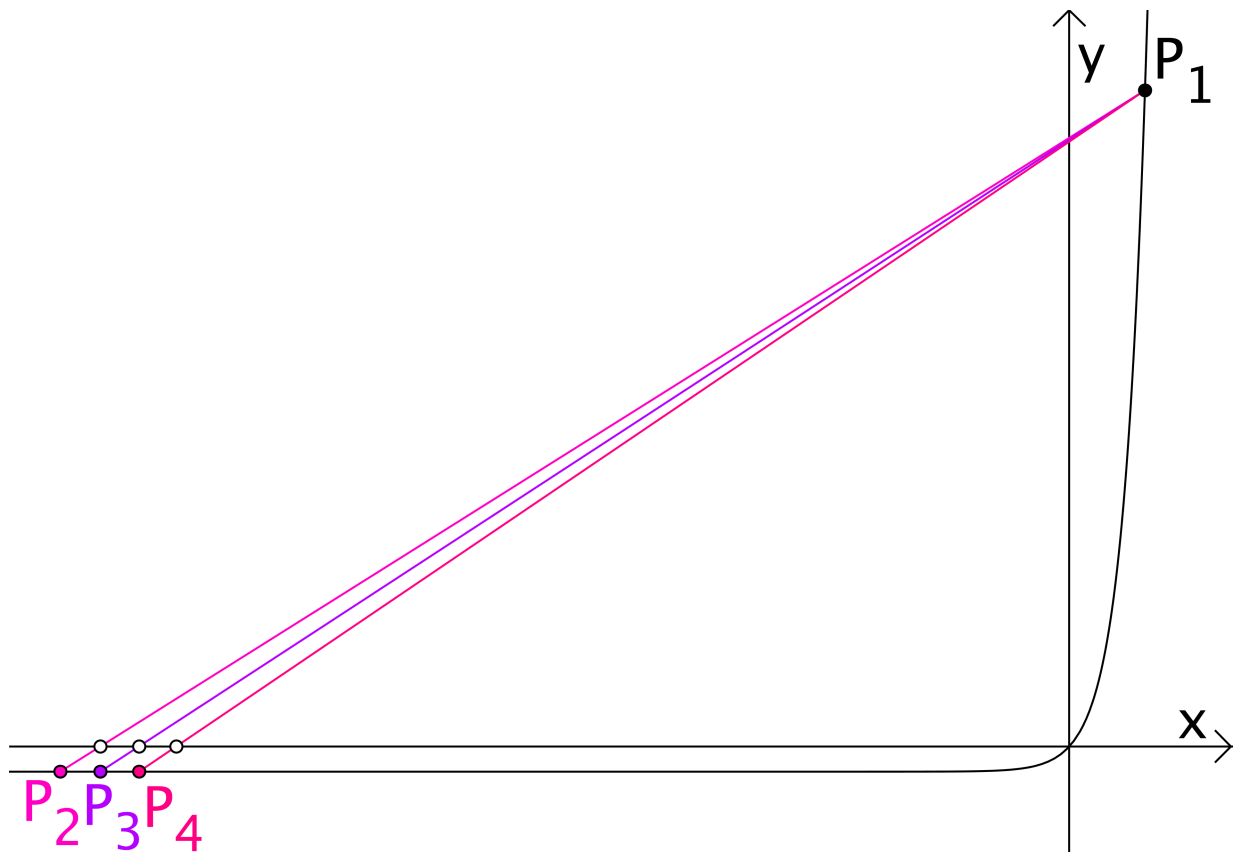


Abbildung 4: Aktualisierung nur einer Näherung bei einer linksgekrümmten Funktion

<sup>4</sup> vgl. Houben, 2000

### 3.3 Das Newton-Verfahren

#### 3.3.1 Funktionsweise

Beim Newton-Verfahren (auch Newton-Raphson-Verfahren) nähert man sich der Nullstelle einer Funktion  $f(x)$  mithilfe ihrer Tangente  $g(x)$  am Startpunkt  $(x_0 | f(x_0))$ . Die Stelle  $x_1$ , an der die Tangente die x-Achse schneidet, ist die nächste Näherung der Nullstelle.<sup>5</sup> Wegen der für die Tangente benötigten Ableitung muss  $f(x)$  bei  $x_{n-1}$  differenzierbar sein. Damit die Tangente die x-Achse schneidet, muss  $f'(x_{n-1}) \neq 0$  gelten.

$$g(x_n) = m \cdot x_n + t$$

$$m = f'(x_{n-1})$$

$$g(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) \Rightarrow f'(x_{n-1}) \cdot x_{n-1} + t = f(x_{n-1})$$

$$t = f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1}) \cdot x_{n-1}$$

$$g(x_n) = f'(x_{n-1}) \cdot x_n + f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1}) \cdot x_{n-1}$$

$$g(x_n) = 0$$

$$x_n \cdot f'(x_{n-1}) = f'(x_{n-1}) \cdot x_{n-1} - f(x_{n-1})$$

$$x_n = \frac{f'(x_{n-1}) \cdot x_{n-1} - f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$\Rightarrow x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Die Ableitung in der Newton-Formel kann näherungsweise auch durch einen Differenzenquotienten ersetzt werden wenn die Berechnung zu aufwendig oder nicht möglich ist:

$$f'(x) \approx f(x) - \frac{f(x+h)}{h}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{h \cdot f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-1} + h)}$$

Nutzt man die letzten beiden Näherungswerte zur Bildung des Differenzenquotienten, so kommt man auf die Regula Falsi:<sup>6</sup>

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

ergibt in Newton-Formel:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

<sup>5</sup> vgl. Buck et al., 2001, S. 115 f.

<sup>6</sup> vgl. Iske, 2007, S.7

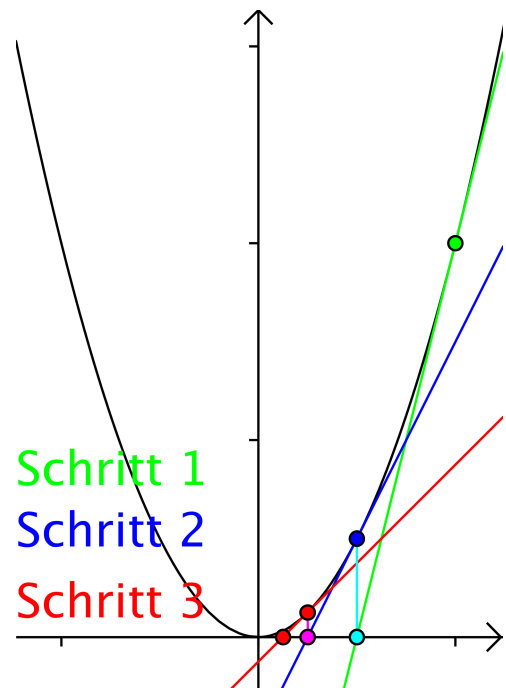


Abbildung 5: Newton-Verfahren



### 3.3.2 Eigenschaften

#### 3.3.2.1 Senkrechte Tangente

Wenn die Ableitung an einem der Näherungswerte Null ist, also an einem lokalen Extremum oder einem Terrassenpunkt, scheitert das Newton-Verfahren an einer Division durch Null.

Ist die Ableitung fast Null, so schneidet die Tangente die x-Achse sehr weit entfernt von der derzeitigen Näherung. Bei

einem Extremum nahe der Nullstelle kann die neue Näherung sehr viel weiter von der Nullstelle entfernt sein als der vorige Wert. In Tabelle 4 im Anhang sind die Schritte des Newton-Verfahrens aufgelistet, die nötig sind um die Nullstelle  $x_{\infty}=2$  für die Funktion  $f(x)=x^3-2\cdot x^2-x+2$  zu finden. Einmal mit dem Startwert  $x_0 = 1,55$  (Ableitung 0,075) und einmal mit dem Startwert  $x_0 = 2,45$  (Ableitung 7,208). Obwohl der absolute Abstand zwischen Nullstelle und Startwert identisch ist, braucht es wegen der flachen Tangente mit  $x_0 = 1,55$  sehr viel mehr Schritte bis zum Erfolg.

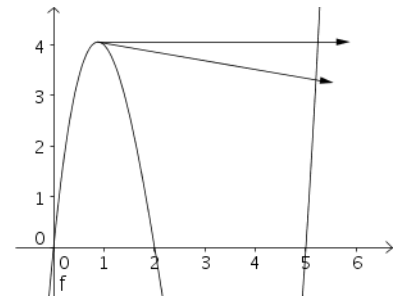


Abbildung 6: (Nahezu) senkrechte Tangenten bei Newton

#### 3.3.2.2 Nullstellen geraden Grades

Beim Newton-Verfahren wird nur ein Startwert benötigt. Deshalb reicht es aus wenn der Graph der Funktion die x-Achse berührt statt schneidet. Die anderen hier vorgestellten Methoden benötigen dagegen sowohl einen Startwert unter als auch einen über der x-Achse und können aus diesem Grund nur Nullstellen ungerader Ordnung bestimmen. Wegen der nahezu senkrechten Tangente im Bereich der Nullstelle braucht jedoch im Vergleich zu einfachen Nullstellen relativ viele Durchläufe bis zur Konvergenz.

#### 3.3.2.3 Nicht-Konvergenz

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, warum das Newtonsche Verfahren nicht konvergiert:

Beispiel 1: In Abbildung 7 kann man dies für die Funktion  $f(x)=x^3-2\cdot x+2$  sehen. Die Newton-Formel liefert für den Wert 1 den Wert 0. Im nächsten Schritt aber wieder den vorigen Wert. Ein Computerprogramm gerät in so einem Fall in eine Endlosschleife.

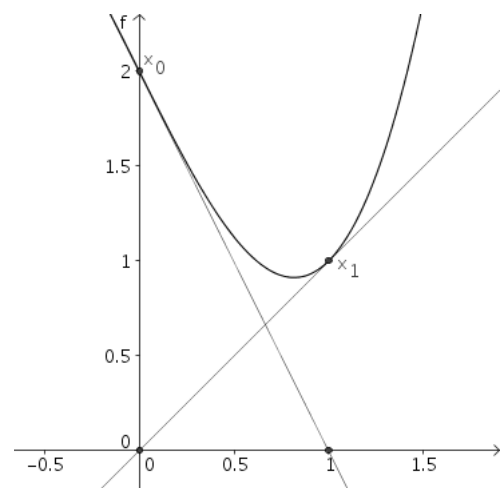


Abbildung 7: Endlosschleife im Newton-Verfahren

$$f(x) = x^3 - 2 \cdot x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 - 2$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 - \frac{0^3 - 2 \cdot 0 + 2}{3 \cdot 0^2 - 2} = 1$$

$$\Rightarrow x_2 = 1 - \frac{1^3 - 2 \cdot 1 + 2}{3 \cdot 1^2 - 2} = 0 = x_0$$

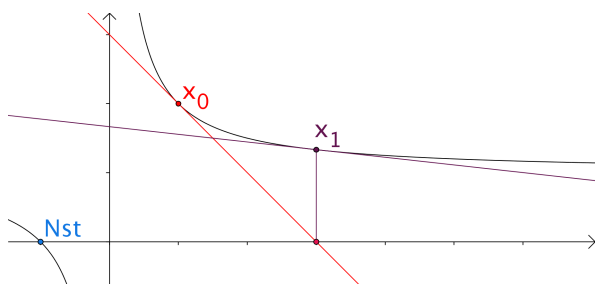


Abbildung 8: Die Näherung entfernt sich von der Nullstelle

Beispiel 2: Wie in Abbildung 8 zu sehen ist, entfernt sich die Näherung des Newton-Verfahrens bei der Funktion  $f(x) = \frac{1}{x} + 1$  für positive Startwerte immer weiter von der Nullstelle. Die Tangenten haben aufgrund der Krümmung des Graphen alle eine negative Steigung, weshalb  $x_n$  bei steigendem  $n$  immer größer wird, obwohl die einzige Nullstelle des Graphen bei -1 liegt.

### 3.3.2.4 Verlassen der Definitionsmenge

Außerdem kann das Newton-Verfahren Werte außerhalb der Definitionsmenge liefern, z.B. bei der Wurzel-Funktion für jeden Startwert  $x_0$ :

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

in Newton-Formel:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\sqrt{x_0}}{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}} = x_0 - 2 \cdot (\sqrt{x_0})^2 = x_0 - 2 \cdot x_0$$

$$x_1 = -x_0 \notin D$$

## 3.4 Vergleich

### 3.4.1 Konvergenzgeschwindigkeiten

„Da die Effizienz eines Iterationsverfahrens stark von der Anzahl der Iterationsschritte beeinflusst (sic) wird, ist es sinnvoll sich Gedanken bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit zu machen. Prinzipiell ist zusagen (sic), daß (sic) eine allgemeingültige Charakterisierung der Konvergenzgeschwindigkeit eines Iterationsverfahrens selbst unter starken Einschränkungen hinsichtlich der Funktionenklasse  $T$  jedoch nicht möglich ist. Im Allgemeinen konvergiert jedoch eine Folge mit einer höheren Konvergenzordnung rascher als eine niedriger (sic) Ordnung. Hier sind vor allem zwei Spezialfälle (...) von Wichtigkeit.“

Bei der quadratischen Konvergenz verdoppelt sich in der Nähe der Lösung die Anzahl der richtigen Ziffern bei jedem Schritt, und bei der linearen Konvergenz ist die Verringerung des Fehlers auf den Konvergenzfaktor zurückzuführen.“<sup>7</sup>

Die Bisektion konvergiert linear,<sup>8</sup> genauso wie die Regula Falsi<sup>9</sup>. Für die Beweise muss hier wegen des fehlenden Platzes auf die Quellen verwiesen werden.

Das Newton-Verfahren konvergiert bei einfachen Nullstellen quadratisch,<sup>10</sup> bei doppelten Nullstellen linear und bei Nullstellen höheren Grades noch langsamer.<sup>11</sup> Dabei ist jedoch zu beachten, dass der Rechenaufwand pro Iteration beim Newton-Verfahren etwa doppelt so hoch ist als bei den anderen Verfahren - neben dem Funktionswert muss auch noch die Ableitung (oder für einen Differenzenquotienten ein zweiter Funktionswert) berechnet werden.<sup>12</sup>

### 3.4.2 Fazit

Die Suche nach Nullstellen mittels der Newton-Methode führt im Regelfall am schnellsten zu einer hohen Genauigkeit, ist aber pro Rechenschritt aufwändiger. Außerdem gibt es einige Fälle, in denen das Verfahren nicht konvergiert. Die Regula Falsi kommt dagegen garantiert zu einer Nullstelle und ist im Allgemeinen schneller als die Bisektion. Diese kann außerdem statt einer Nullstelle auch eine Definitionslücke liefern. Wenn jedoch nur eine geringe Genauigkeit benötigt wird oder eine besonders „böartige“ Funktion sowohl Regula Falsi als auch Newton ausbremst, hat sie auch aufgrund ihrer Einfachheit dennoch ihre Daseinsberechtigung.

Während der Realisierung eines Computerprogramms ist in vielen Fällen auch schon bekannt, für welche Funktionstypen Lösungen gefunden werden müssen. Sind dies z.B. Exponentialfunktionen, kann man wegen der konstanten Rechts- oder Linkskrümmung die Regula Falsi von vornherein ausschließen. Wenn die Funktionsklassen auch mehrfache Nullstellen erlauben, muss das Newton-Verfahren trotz seiner in solchen Fällen langsamen Konvergenzgeschwindigkeit Teil der Lösungsstrategie sein, da es als einziges der hier vorgestellten Verfahren Nullstellen gerader Ordnung finden kann.

---

7 Troger et al., 2004

8 vgl. Kley, 2005, S.8

9 vgl. Kreßner, 2002, S.2

10 vgl. Kley, 2005, S.11 f.

11 vgl. Stadie et al., S.26

12 vgl. Kreßner, 2002, S.3

## 4. Umsetzung in einem Computerprogramm

Die beschriebenen Verfahren wurden als Teil dieser Facharbeit in einem Beispiel-Programm umgesetzt. Dort kann man eine Funktion eingeben und die Methode wählen. Das Programm bestimmt dann näherungsweise eine Nullstelle. Dazu wurde als Programmiersprache Java als moderne, objektorientierte Sprache gewählt. Der Datentyp für die berechneten Zahlen ist `double`, weil das bei der benötigten Genauigkeit (s. 4.3) ausreicht, für andere Fälle stände aber auch die Klasse `BigDecimal` in der Standardbibliothek zur Verfügung.

### 4.1 Bestimmung der Startwerte

Die implementierten Verfahren benötigen jeweils einen oder zwei Startwerte. Das Programm nimmt diese entweder vom Benutzer entgegen oder sucht selbst in Zehnerschritten nach dem betragsmäßig niedrigsten Funktionswert (außer 0) zwischen -1000 und 1000. Für einen zweiten Startwert geht es dann von dort aus wiederum in Zehnerschritten zum nächsten Funktionswert mit anderem Vorzeichen. Die so gefundenen Startwerte sind meist so weit von der Nullstelle entfernt, dass die unterschiedlichen Verhaltensweisen der Verfahren deutliche hervortreten.

### 4.2 Überblick

Das Programm besteht aus den Klassen `FunktionsGUI`, `Funktion` und `NullstellenSuche`. Die Klasse `FunktionsGUI` enthält die Benutzeroberfläche und die Aufrufe auf die anderen Klassen. Die Objekte der Klasse `Funktion` stellen wie der Name verrät eine Funktion dar. Mit ihrer Hilfe werden Funktionswerte der Funktion und ihrer Ableitung berechnet. Die Klasse `NullstellenSuche` übernimmt schließlich die eigentliche Bestimmung der Nullstellen.

### 4.3 Genauere Betrachtung der Klasse `NullstellenSuche`

Dem Konstruktor der Klasse wird das gewünschte Verfahren (mithilfe der in `NullstellenSuche.Methode` definierten Konstanten) und eine Funktion  $f(x)$  übergeben. Außerdem können diesem auch die Startwerte für das Verfahren mitgegeben werden, andernfalls werden diese auf die bereits beschriebene Weise bestimmt.

Die Methode `start` ruft in einer Schleife die Iterationsvorschrift des genutzten Verfahrens auf. Diese Schleife wird abgebrochen:

- wenn die Zielgenauigkeit von  $\varepsilon = 10^{-13}$  erreicht wird. Diese wurde wegen Ungenauigkeiten bei der Berechnung hoher Funktionswerte von trigonometrischen Funktionen gewählt, die bei einem kleiner gewählten Epsilon zu einer Endlosschleife führen. Umrechnungsfehler zwischen Binär- und Dezimalsystem spielen in dieser Größenordnung noch keine Rolle<sup>13</sup> Die Tabellen im Anhang dieser Facharbeit wurden als Ausgabe des Programms mit diesem Wert berechnet und auf 15 Nachkommastellen gerundet.
- nach 500 000 Iterationen, um auch Extremfälle der Konvergenzgeschwindigkeit betrachten zu können. In der Praxis bietet es sich (wenn eine höhere Genauigkeit gewünscht ist) an, bei unzureichender Konvergenzgeschwindigkeit früher abzubrechen und auf ein anderes Verfahren zu wechseln.

#### **4.4 Umsetzung der Verfahren**

Nach der Ausführung eines jeden Rechenschritts muss bei allen Verfahren geprüft werden, ob die Nullstelle erreicht wurde und (für den Fall nicht stetischer Funktionen) ob der neue Näherungswert noch einen gültigen Funktionswert besitzt. Bei der Bisektion muss außerdem getestet werden, ob eine Polstelle gefunden wurde (durch Vergleich des Näherungswerts mit den Pseudo-Werten `POSITIVE_INFINITY` und `NEGATIVE_INFINITY`). Beim Newton-Verfahren wurde außerdem eine Prüfung, ob der Wert der Ableitung nicht Null oder keine gültige Zahl ist, eingebaut. Das wäre nicht unbedingt, da in diesem der Näherungswert nach dem Ausführen der vollständigen Rechenvorschrift auch keine gültige Zahl mehr wäre, auf diese Weise ist aber besser zu erkennen, warum das Verfahren abbricht.

---

<sup>13</sup> vgl. Kley, 2005, S.6

## **5. Schluss**

Wie man sehen konnte, gibt es also mehrere Möglichkeiten, Gleichungen mithilfe numerischer Verfahren näherungsweise zu lösen. Es kommt auf den Einzelfall an, welches Verfahren oder welche Kombination man in einem konkreten Fall anwendet. Auch gibt es noch viele Varianten der genannten Methoden und einige weitere Verfahren, die den Umfang dieser Facharbeit gesprengt hätten. Daher habe ich mich auf die Standardverfahren, die für die meisten Anwendungsfälle ausreichen, beschränkt.

## 6. Literaturverzeichnis

- Prof. Dr. Wilhelm Kley: "Numerische Methoden in Physik und Astrophysik"  
Internetseite <http://www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~kley/lehre/numerik/script/kap1.pdf>, <http://www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~kley/lehre/numerik/script/kap2.pdf> vom 3. 11. 2005, aufgerufen am 12.01.2009
- Wolfgang Brauch, Hans-Joachim Dreyer, Wolfhart Haacke: "Mathematik für Ingenieure" 11. Auflage aus 2006 ISBN 9783835100732
- Prof. Dr. Clemens Brand: "Regula falsi (lineares Eingabeln)" Internetseite <http://institute.unileoben.ac.at/amat/lehrbetrieb/num/vl-skript/skripts05/node24.html> vom 23.02.2005, aufgerufen am 24.01.2009
- Stephan Houben: "3. Regula Falsi" Internetseite <http://www.win.tue.nl/~stepanh/dictaat/solvers/node3.html> vom 18.03.2000, aufgerufen am 25.01.2009
- Heidi Buck, Rolf Dürr, Hans Freudigmann, Günther Reinelt, Manfred Zinser: "Lambacher-Schweizer, Analysis Leistungskurs, Sekundarstufe II, Ausgabe A" 1. Auflage aus 2001 ISBN 3-12-732180-5
- Prof. Dr. Armin Iske: "Newton-Verfahren" Internetseite <http://www.math.uni-hamburg.de/home/iske/vorlesungen/numerik2/fohlen/vl6.pdf> vom 04.12.2007, aufgerufen am 26.01.2009

- Christian Troger, Markus Gutensohn, Christian Haller, Roland Rahm, Johannes Riemer, Sascha Kerschhofer, Shadi Abou-Zahra, Marcel Binder, Stefan Lenk, Michael Stadt: "Konvergenzgeschwindigkeit" Internetseite [http://www.dorn.org/unis/kap10/j02\\_03.htm](http://www.dorn.org/unis/kap10/j02_03.htm) vom 03.04.2004, aufgerufen am 26.01.2009
- Daniel Kreßner: "Sekantenverfahren, Regula Falsi" Internetseite <http://www.math.tu-berlin.de/~kressner/pm1/regulafalsi.ps> vom 17.07.2002, aufgerufen am 26.01.2009
- Dr. Hartmut Stadie, Dr. Christian Sander: "Num. und stat. Methoden in C++, Teil 2, Vorlesung 1: Num. Nullstellensuche" Internetseite [http://www.desy.de/~csander/Lehre/Cpp\\_WS0708/VL1\\_Nullstellen.pdf](http://www.desy.de/~csander/Lehre/Cpp_WS0708/VL1_Nullstellen.pdf) aus 2008, aufgerufen am 26.01.2009



## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Die Bisektion.....	5
Abbildung 2: Konvergenz auf eine Polstelle.....	6
Abbildung 3: Regula Falsi.....	6
Abbildung 4: Aktualisierung nur einer Näherung bei einer linksgekrümmten Funktion.....	7
Abbildung 5: Newton-Verfahren.....	8
Abbildung 6: (Nahezu) senkrechte Tangenten bei Newton.....	9
Abbildung 7: Endlosschleife im Newton-Verfahren.....	9
Abbildung 8: Die Näherung entfernt sich von der Nullstelle.....	10

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Bisektion der Funktion $(x-4)(x-8)(x-7)/((x-10)(x-6))$ mit den Startwerten 2 und 11.....	18
Tabelle 2: Regula Falsi mit der Funktion $0.1(x-1)(x-4)(x+2)$ und verschiedenen Startwerten.....	19
Tabelle 3: Bisektion mit der Funktion $4^*x$ und den Startwerten -0,5 und 1,75.....	20
Tabelle 4: Newton-Verfahren mit der Funktion $x^3-2x^2-x+2$ .....	21
Tabelle 5: Newtonsches Verfahren mit der Funktion $(0.1(x-1))((x-4)(x+2))$ .....	22

## 7. Anhang

### A) Beispieldurchläufe der verschiedenen Verfahren

Tabelle 1: Bisektion der Funktion  $(x-4)(x-8)(x-7)/((x-10)(x-6))$  mit den Startwerten 2 und 11

x1	f(x1)	x2	f(x2)
2.0000000000000000	-1.8750000000000000	11.0000000000000000	16.8000000000000000
6.5000000000000000	-1.0714285714285714	11.0000000000000000	16.8000000000000000
8.7500000000000000	-1.8136363636363636	11.0000000000000000	16.8000000000000000
9.8750000000000000	-65.383064516129040	11.0000000000000000	16.8000000000000000
9.8750000000000000	-65.383064516129040	10.4375000000000000	27.783576458752513
9.8750000000000000	-65.383064516129040	10.1562500000000000	64.515648496240600
9.8750000000000000	-65.383064516129040	10.0156250000000000	582.766597762645900
9.9453125000000000	-157.879581417963240	10.0156250000000000	582.766597762645900
9.9804687500000000	-454.070757942836100	10.0156250000000000	582.766597762645900
9.9980468750000000	-4 601.252075254946000	10.0156250000000000	582.766597762645900
9.9980468750000000	-4 601.252075254946000	10.0068359375000000	1 323.328691026111000
9.9980468750000000	-4 601.252075254946000	10.0024414062500000	3 693.152593901065300
9.9980468750000000	-4 601.252075254946000	10.0002441406250000	36 870.750259398480000
9.9991455078125000	-10 525.822336480789000	10.0002441406250000	36 870.750259398480000
9.9996948242187500	-29 484.450324250723000	10.0002441406250000	36 870.750259398480000
9.9996948242187500	-294 905.250032424900000	10.0002441406250000	36 870.750259398480000
9.9996948242187500	-294 905.250032424900000	10.000106811523438	84 267.321542058500000
9.9996948242187500	-294 905.250032424900000	10.000038146972656	235 936.350040531140000
9.9996948242187500	-294 905.250032424900000	10.00003814697266	2 359 302.750004053000000
9.9998664855957000	-674 077.821442757400000	10.00003814697266	2 359 302.750004053000000
9.9999523162841800	-1 887 430.050005066400000	10.00003814697266	2 359 302.750004053000000
9.9999523162842000	-18 874 361.250000507000000	10.00003814697266	2 359 302.750004053000000
9.9999523162842000	-18 874 361.250000507000000	10.00001668930054	5 392 683.321430345000000
9.9999523162842000	-18 874 361.250000507000000	10.00000596046448	15 099 501.150000634000000
9.9999523162842000	-18 874 361.250000507000000	10.0000059604645	150 994 950.750000100000000
9.9999979138374300	-43 141 405.821428790000000	10.0000059604645	150 994 950.750000100000000
9.9999992549419400	-120 795 948.450000060000000	10.0000059604645	150 994 950.750000100000000
9.9999992549420000	-1 207 959 545.250000000000000	10.0000059604645	150 994 950.750000100000000
9.9999992549420000	-1 207 959 545.250000000000000	10.00000026077032	345 131 307.321428600000000
9.9999992549420000	-1 207 959 545.250000000000000	10.00000009313226	966 367 648.350000000000000
9.9999992549420000	-1 207 959 545.250000000000000	10.00000000931323	9 663 676 422.750000000000000
9.9999996740371000	-2 761 050 397.821429000000000	10.00000000931323	9 663 676 422.750000000000000
9.9999996740371000	-7 730 941 126.050000000000000	10.00000000931323	9 663 676 422.750000000000000
9.9999996740371000	-77 309 411 321.250000000000000	10.00000000931323	9 663 676 422.750000000000000
9.9999996740371000	-77 309 411 321.250000000000000	10.00000000407454	22 088 403 243.321430000000000
9.9999996740371000	-77 309 411 321.250000000000000	10.00000000145520	61 847 529 069.150000000000000
9.9999996740371000	-77 309 411 321.250000000000000	10.0000000014552	618 475 290 630.750000000000000
9.9999996740371000	-176 707 225 885.821440000000000	10.0000000014552	618 475 290 630.750000000000000
9.9999996740371000	-494 780 232 492.450000000000000	10.0000000014552	618 475 290 630.750000000000000
9.9999996740371000	-4 947 802 324 985.250000000000000	10.0000000014552	618 475 290 630.750000000000000
9.9999996740371000	-4 947 802 324 985.250000000000000	10.0000000006366	1 413 657 807 147.321500000000000
9.9999996740371000	-4 947 802 324 985.250000000000000	10.0000000002274	3 958 241 860 000.350000000000000
9.9999996740371000	-4 947 802 324 985.250000000000000	10.0000000000227	39 582 418 599 942.750000000000000
9.9999996740371000	-11 309 262 457 117.822000000000000	10.00000000000227	39 582 418 599 942.750000000000000
9.9999996740371000	-316 659 348 799 942.050000000000000	10.00000000000227	39 582 418 599 942.750000000000000
9.9999996740371000	-316 659 348 799 942.250000000000000	10.00000000000100	90 474 099 657 003.330000000000000
9.9999996740371000	-316 659 348 799 942.250000000000000	10.00000000000036	253 327 479 039 597.160000000000000
9.9999996740371000	-316 659 348 799 942.250000000000000	10.00000000000004	2 533 274 790 395 910.500000000000000
9.9999996740371000	-723 792 797 255 965.800000000000000	10.000000000000004	2 533 274 790 395 910.500000000000000
9.9999996740371000	-2 533 274 790 395 897.000000000000000	10.000000000000004	2 533 274 790 395 910.500000000000000

Fehler: Funktionswert  $\infty$

Tabelle 2: Regula Falsi mit der Funktion  $0.1(x-1)(x-4)(x+2)$  und verschiedenen

Startwerten

Startwerte -3 und -1			
x1	f(x1)	x2	f(x2)
-1.0000000000000000	1.0000000000000000	-3.0000000000000000	-2.8000000000000000
-1.0000000000000000	1.0000000000000000	-1.526315789473684	0.661320892258347
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.526315789473684	0.661320892258347
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.874526869133335	0.211880018353471
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.970356218541220	0.052570533183045
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.993202214912815	0.012194455675536
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.998452049071045	0.002784155506160
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.999648075303870	0.000633352991499
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.999920019598314	0.000143958965908
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.999981824710567	0.000032715223672
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.999995869801830	0.000007434341354
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999061447478	0.000001689393746
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999786722104	0.000000383900172
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999951534464	0.000000087237962
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999988986631	0.000000019824063
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999997497308	0.000000004504845
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999999431285	0.000000001023687
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999999870765	0.000000000232624
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999999970632	0.000000000052862
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999999993326	0.000000000012012
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999999998483	0.000000000002730
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999999999656	0.000000000000620
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999999999922	0.000000000000141
-2.554024967714162	-1.290499685651999	-1.99999999999982	0.000000000000032
<b>Nullstelle gefunden: -1.99999999999982</b>			
Startwerte -3 und 5			
x1	f(x1)	x2	f(x2)
5.0000000000000000	2.8000000000000000	-3.0000000000000000	-2.8000000000000000
1.0000000000000000	-0.0000000000000000	-3.0000000000000000	-2.8000000000000000
<b>Nullstelle gefunden: 1.0000000000000000</b>			
Startwerte -3 und 8			
x1	f(x1)	x2	f(x2)
8.0000000000000000	28.0000000000000000	-3.0000000000000000	-2.8000000000000000
8.0000000000000000	28.0000000000000000	-2.0000000000000000	0.0000000000000000
<b>Nullstelle gefunden: -2.0000000000000000</b>			
Startwerte -2,5 und 4,5			
x1	f(x1)	x2	f(x2)
4.5000000000000000	1.1375000000000000	-2.5000000000000000	-1.1375000000000000
4.5000000000000000	1.1375000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000
<b>Nullstelle gefunden: 1.0000000000000000</b>			

Tabelle 3: Bisektion mit der Funktion  $4^x$  und den Startwerten  $-0,5$  und  $1,75$ 

x1	f(x1)	x2	f(x2)
-0.5000000000000000	-2.0000000000000000	1.7500000000000000	7.0000000000000000
-0.5000000000000000	-2.0000000000000000	0.6250000000000000	2.5000000000000000
-0.5000000000000000	-2.0000000000000000	0.0625000000000000	0.2500000000000000
-0.2187500000000000	-0.8750000000000000	0.0625000000000000	0.2500000000000000
-0.0781250000000000	-0.3125000000000000	0.0625000000000000	0.2500000000000000
-0.0078125000000000	-0.0312500000000000	0.0625000000000000	0.2500000000000000
-0.0078125000000000	-0.0312500000000000	0.0273437500000000	0.1093750000000000
-0.0078125000000000	-0.0312500000000000	0.0097656250000000	0.0390625000000000
-0.0034179687500000	-0.0136718750000000	0.0097656250000000	0.0039062500000000
-0.0012207031250000	-0.0048828125000000	0.0097656250000000	0.0039062500000000
-0.0012207031250000	-0.0048828125000000	0.0009765625000000	0.0039062500000000
-0.0012207031250000	-0.0048828125000000	0.0004272460937500	0.0017089843750000
-0.0012207031250000	-0.0048828125000000	0.0001525878906250	0.0006103515625000
-0.0012207031250000	-0.0048828125000000	0.0000152587890625	0.0000610351562500
-0.0005340576171919	-0.0002136230468750	0.0000152587890625	0.0000610351562500
-0.0001907348632812	-0.0000762939453125	0.0000152587890625	0.0000610351562500
-0.0000190734863328	-0.0000076293945312	0.0000152587890625	0.0000610351562500
-0.0000019073486332	-0.0000007629394531	0.0000066757202150	0.0000267028808590
-0.0000001907348633	-0.0000007629394531	0.0000023841857910	0.0000095367431640
-0.000000083446502712	-0.000000333786010712	0.0000002384185791	0.0000009536743164
-0.000000029802322412	-0.000000119209289612	0.0000002384185791	0.0000009536743164
-0.000000002980232212	-0.000000011920929012	0.0000002384185791	0.0000009536743164
-0.0000000002980232212	-0.0000000011920929012	0.000000104308128128	0.000000417232513128
-0.00000000002980232212	-0.00000000011920929012	0.000000037252903128	0.0000001490116128
-0.000000000001303851612	-0.0000000005215406412	0.000000003725290128	0.00000001490116128
-0.000000000000465661312	-0.0000000001862645112	0.000000003725290128	0.00000001490116128
-0.000000000000046566112	-0.0000000001862645112	0.000000003725290128	0.00000001490116128
-0.0000000000000046566112	-0.0000000001862645112	0.000000001629815128	0.000000006519258128
-0.00000000000000046566112	-0.0000000001862645112	0.000000000582077128	0.000000002328306128
-0.000000000000000046566112	-0.0000000001862645112	0.000000000058208128	0.000000000232831128
-0.00000000000203727128	-0.000000000814907128	0.000000000058208128	0.000000000232831128
-0.0000000000072760128	-0.000000000291038128	0.000000000058208128	0.000000000232831128
-0.0000000000007276128	-0.00000000029104128	0.000000000058208128	0.000000000232831128
-0.00000000000007276128	-0.00000000029104128	0.000000000025466128	0.000000000101863128
-0.000000000000007276128	-0.00000000029104128	0.000000000009095128	0.000000000036380128
-0.0000000000000007276128	-0.00000000029104128	0.000000000000909128	0.000000000003638128
-0.00000000000000003183128	-0.00000000012733128	0.000000000000909128	0.000000000003638128
-0.00000000000000001137128	-0.00000000004547128	0.000000000000909128	0.000000000003638128
-0.00000000000000000114128	-0.00000000000455128	0.000000000000909128	0.000000000003638128
-0.000000000000000000114128	-0.000000000000455128	0.000000000000398128	0.000000000001592128
-0.0000000000000000000114128	-0.0000000000000455128	0.0000000000000142128	0.000000000000568128
-0.00000000000000000000114128	-0.00000000000000455128	0.0000000000000014128	0.0000000000000057128

Nullstelle gefunden: 0.000000000000014

Tabelle 4: Newton-Verfahren mit der Funktion  $x^3-2x^2-x+2$ 

	x	f(x)	f'(x)
<b>Startwert 1.55:</b>			
	1.55000000000000000000	-0.63112499999999990000	0.00750000000000117200
	85.699999999868300000	614 650.11299971440000000000	21 689.66999999328000000000
	57.36161988632420000000	182 104.04531791300000000000	9 640.61982840413500000000
	38.47237328608172000000	53 947.14465666457500000000	4 285.48102564651600000000
	25.88402104888426400000	15 977.99320185773500000000	1 905.41155278171370000000
	17.49843464969851700000	4 730.04809801932100000000	847.59190697051500000000
	11.91786213700714100000	1 398.77002969034380000000	377.43486520209670000000
	8.21187162407088800000	412.68466992846890000000	168.45702021437840000000
	5.76207956789367200000	121.14483449200478000000	75.55636456863849000000
	4.15870922068815100000	35.17586967437874500000	34.24975026395735000000
	3.13166904073694200000	9.96700643577391800000	15.89537677918294600000
	2.50463096707347250000	2.66100804634266000000	7.80100497537630500000
	2.16352003909149200000	0.60188766015439390000	4.38837672228538600000
	2.02636507308826760000	0.08189401439319300000	3.21300593594298970000
	2.00087678703281170000	0.00263343679447247700	3.00701660252899750000
	2.00000102306388070000	0.00000306919582904186	3.00000818451418460000
	2.00000000000139530000	0.00000000000418598489	3.00000000001116260000
	2.00000000000000000000	0.00000000000000000000	3.00000000000000000000

Nullstelle gefunden: 2.0

<b>Startwert 2.45:</b>			
	2.45000000000000000000	2.25112500000000100000	7.20750000000000300000
	2.13766909469302830000	0.49142761462755136000	4.15821109644502200000
	2.01948663516188800000	0.05998622092490358000	3.15703226814490100000
	2.00048580912340370000	0.00145837152688388370	3.00388718101874200000
	2.00000031434979860000	0.00000094304979203486	3.00000251479868400000
	2.00000000000013150000	0.00000000000039435122	3.00000000001051600000
	2.00000000000000000000	0.00000000000000000000	3.00000000000000000000

Nullstelle gefunden: 2.0

Tabelle 5: Newtonsches Verfahren mit der Funktion  $(0.1(x-1))((x-4)(x+2))$ **Startwert 4,5**

	<b>x</b>	<b>f(x)</b>	<b>f'(x)</b>
	4.500000000000000	1.137500000000000	2.775000000000000
	4.090090090090090	0.169539883199489	1.964597029461894
	4.003792553925167	0.006839547639055	1.806830912104883
	4.000007170581749	0.000012907093423	1.800012907062573
	4.000000000025708	0.000000000046275	1.800000000046275
	4.000000000000000	0.000000000000000	1.800000000000000

**Nullstelle gefunden: 4.000000000000000****Startwert 3,5**

	<b>x</b>	<b>f(x)</b>	<b>f'(x)</b>
	3.500000000000000	-0.687500000000000	0.975000000000000
	4.205128205128205	0.407963721573189	2.181854043392506
	4.018147906052444	0.032963240434003	1.832765034842627
	4.000162381554028	0.000292310528671	1.800292294707581
	4.000000013182220	0.000000023727996	1.800000023727996
	4.000000000000000	0.000000000000000	1.800000000000000

**Nullstelle gefunden: 4.000000000000000****Startwert 2,5**

	<b>x</b>	<b>f(x)</b>	<b>f'(x)</b>
	2.500000000000000	-1.012500000000000	-0.225000000000000
	-2.000000000000001	-0.000000000000002	1.800000000000002

**Nullstelle gefunden: -2.000000000000001****Startwert 0,5**

	<b>x</b>	<b>f(x)</b>	<b>f'(x)</b>
	0.500000000000000	0.437500000000000	-0.825000000000000
	1.030303030303030	-0.027269944625317	-0.899724517906336
	0.999993814445743	0.000005566998831	-0.899999999988522
	1.000000000000000	-0.000000000000000	-0.900000000000000

Nullstelle gefunden: 1.000000000000000

**Startwert -1,5**

	<b>x</b>	<b>f(x)</b>	<b>f'(x)</b>
	-1.500000000000000	0.687500000000000	0.975000000000000
	-2.205128205128205	-0.407963721573189	2.181854043392506
	-2.018147906052444	-0.032963240434002	1.832765034842626
	-2.000162381554028	-0.000292310528671	1.800292294707581
	-2.000000013182220	-0.000000023727996	1.800000023727996
	-2.000000000000000	0.000000000000000	1.800000000000000

**Nullstelle gefunden: -2.000000000000000****Startwert -2,5**

	<b>x</b>	<b>f(x)</b>	<b>f'(x)</b>
	-2.500000000000000	-1.137500000000000	2.775000000000000
	-2.090090090090090	-0.169539883199489	1.964597029461894
	-2.003792553925167	-0.006839547639055	1.806830912104883
	-2.000007170581749	-0.000012907093423	1.800012907062573
	-2.000000000025708	-0.000000000046275	1.800000000046275
	-2.000000000000000	0.000000000000000	1.800000000000000

**Nullstelle gefunden: -2.000000000000000**

## **B) Anlagen**

Anbei liegen eine CD mit dem lauffähigen Programm, dessen Quelltext sowie den zitierten Quellen.

Ich erkläre hiermit, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

---

Malte Kraus